短期集中　ご購入はこちら

得計算テク　マイコンでも使えて便利！

知っ得！軽量sin/cos計算アルゴリズム

第3回 軽量ミニマックス近似式の求め方

三上 直樹

基本的な考え方

ミニマックス近似式とは，誤差の絶対値の最大値が最小になるような近似式です．

ミニマックス近似式を求めるのはそれほど簡単ではありませんが，文献(1)のように，さまざまな数学関数について，いろいろな精度のミニマックス近似式が載っている書籍もあります．しかし，精度の低い近似式はあまり載っていないため，精度はあまり必要としないが実行速度が要求されるような数学関数のプログラムを自作する場合には困ることもあります．

そのような場合，自分で近似式を求めなければなりませんが，一部の数学関数を除けば，式の変形では求められません．

そこで，通常は次のようにしてミニマックス近似式を求めます．

①最初に，精度がそれなりに高い，第1近似式を求める．

②誤差の極大値，極小値の全ての絶対値，および近似区間の両端での誤差の絶対値を求め，それらがほぼ等しくなるまで，第1近似式の係数を少しずつ修正していく．

そこで，以降では第1近似式の求め方と，ミニマックス近似式の求め方を説明します．なお，ミニマックス近似式は多項式に限定します[注1]．

本稿を書く上で，文献(2)を参考にしました．

ステップ1：そこそこ精度がある第1近似式を求める

第1近似式の求め方の中でよく使われる，チェビシェフ補間による方法を説明します．

最初に，$-1 \leqq x \leqq 1$の区間で，ある関数$f(x)$を近似するような第1近似式を求める方法を説明します．

まず，近似式をN次の多項式$g(x)$とし，これをチェビシェフの多項式[注2]$T_n(x)$を使って次のように表します．

$$g(x) = c'_0 T_0(x) + c'_1 T_1(x) + \cdots + c'_N T_N(x) \quad \cdots\cdots (1)$$

チェビシェフ補間では，この係数$c'_0, c'_1, \cdots, c'_N$を以下のようにして求めます．

まず，r_kという値を次のように決めます．

$$r_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(N+1)}, \quad k = 0, 1, \cdots, N \quad \cdots\cdots (2)$$

このr_kを使うと，係数$c'_0, c'_1, \cdots, c'_N$は次の式で計算されます．

$$\begin{cases} c'_0 = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} f(r_k), & n = 0 \\ c'_n = \dfrac{2}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} f(r_k)\cos\dfrac{(2k+1)n\pi}{2(N+1)}, & n = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \quad \cdots\cdots (3)$$

次に，式(3)で求められた係数とチェビシェフの多項式を式(1)に代入し，さらにこれを展開して同じ次数のxについてまとめると，xに関する次の多項式$g(x)$が求められます．この式が第1近似式になります．

近似する区間が$a \leqq x \leqq b$の場合は，最初に次に示す変数変換を行います．

$$u = \frac{2x - (b+a)}{b-a} \quad \cdots\cdots (4)$$

これを利用して，関数$f(x)$を，uに関する第1近似式を求めます．最後に式(4)を使い，区間$a \leqq x \leqq b$における，xについての多項式に変換します．

例として，$-1 \leqq x \leqq 1$の区間で，チェビシェフ補間により求めた，$\sin(\pi x/2)$の5次の近似式を，次に示します．

注1：ミニマックス近似式は，多項式以外にも，有理関数や連分数などとしても求められるが，ここではプログラムを作りやすいことから，多項式を使う．

注2：チェビシェフの多項式は，幾つかのnについて具体的に表すと次のようになる．

$T_0(x) = 1$,
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$,
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$,
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$,
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$