拡大/縮小/回転と平行移動を一度に行って計算量を減らす

3-1 超基本の行列計算…アフィン変換

安川 章

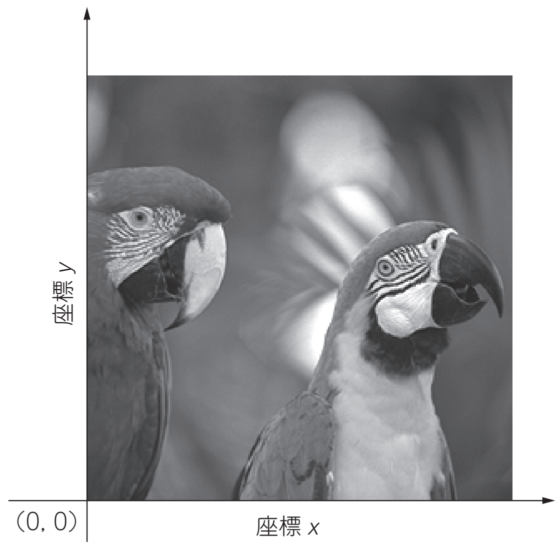

図1　アフィン変換前のもとの画像
画像を変形するには拡大/縮小/回転と平行移動を一度に行うアフィン変換を使う

アフィン変換とは

● 線形変換と平行移動を組み合わせた処理

アフィン変換は線形変換（拡大や縮小，回転など）と平行移動を組み合わせた変換です．変換前の座標を (x, y)，変換後の座標を (u, v) とすると，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

となります．この a～d の 2×2 の行列の部分が線形変換，e，f の部分が平行移動の変換を行います．

さらに，3×3 の行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表現する場合もあります．この表現を同次座標と呼び，線形変換と平行移動とともに行列の積だけで求めることができるので便利です．

この同次座標を用いたアフィン変換を紹介します．以下の計算では，変換前の画像を**図1**とします．

アフィン変換の例

● アフィン変換その1…拡大/縮小

X 軸方向の拡大率を S_x，Y 軸方向の拡大率を S_y とすると，拡大縮小のアフィン変換は，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．

図2（**a**）に X 軸方向に2倍，Y 軸方向に0.5倍の場合を，（**b**）に Y 軸方向に－1倍した場合の結果を示します．

● アフィン変換その2…平行移動

X 軸方向へ T_x，Y 軸方向へ T_y だけ移動するアフィン変換は，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．**図3**に平行移動した結果を示します．

● アフィン変換その3…回転

原点回りに $\theta°$ 回転するアフィン変換は，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．**図4**に結果を示します．

● アフィン変換その4…スキュー（せん断）

四角形を平行四辺形に変形する処理をスキューまたはせん断といいます．

X 軸に対して $\theta°$，Y 軸方向へ傾ける処理は，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．**図5**に X 軸に対するせん断の処理結果を示し